FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH VE 3D NÁHLEDU

SMETANOVÁ Dana – VARGOVÁ Michaela – BIBA Vladislav, CZ

Resumé

V článku je prezentováno praktické využití anaglyfů ve výuce. Tyto slouží studentům pro lepší pochopení a vizualizaci funkcí dvou proměnných. Je zde srovnáno zobrazení funkcí pomocí projekce do roviny (2D náhled) a pomocí anaglyfické projekce (3D náhled).

Klíčová slova: anaglyf, funkce dvou proměnných, lokální extrémy, sedlový bod, 3D

FUNCTION OF TWO VARIABLES IN 3D

Abstract

Paper presents practical examples of utilising anaglyphic projection in support of student's better comprehension and visualisation of functions of two variables. Paper presents comparison of function graphical representation projected in flat surface and by anaglyphic projection. In support of better visualization, these figures were created for students of multivariable calculus.

Key words: anaglyph, function of two variables, local extremes, saddle point, 3D

Úvod

V běžné praxi se na vysokých školách technického směru setkáváme především se studenty středních škol také technického směru. Na těchto středních školách jsou zcela přirozeně upřednostněny specializované technické předměty na úkor předmětů teoretického základu. Je to nejen v oblasti hodinové dotace, ale i v probrané látce.

Tento fakt se u mnohých studentů projevuje v nedostatečně šíři znalostí získaných ze střední školy. Jedna z oblastí, se kterou mají studenti problémy, je analytická geometrie. Vzniká problém s propojením algebraického zápisu funkcí a křivek s jejich grafy.

Neschopnost vizualizace funkcí jedné proměnné se projevuje i u funkcí dvou proměnných. Pro vizualizaci grafů těchto funkcí se používají metody, které vedou na problematiku funkcí a křivek jedné proměnné (např. metoda řezů – vrstevnic).

Pochopení tvaru (grafu) funkce dvou proměnných je velmi důležité pro pochopení, co vlastně děláme analytickými metodami a jak tvar funkce ovlivňuje situaci v aplikačních příkladech. Například se jedná o hledání extrémálních hodnot funkce.

Z tohoto důvodu jsme vytvořili pro výuku sadu anaglyfů, které zobrazují grafy funkcí ve 3D náhledu. Část z takto vytvořených anaglyfů prezentujeme v tomto článku. Anaglyfy dalších funkcí prezentujeme také v [9]. Prostorová znázornění funkcí mohou částečně odstranit neschopnost vytvořit graf funkce jinými metodami a propojit algebraický zápis funkce s jejím geometrickým znázorněním. Jakým způsobem funguje anaglyf, je podrobněji vysvětleno v následující kapitole. K tvorbě těchto anaglyfů jsme použili volně dostupný program GeoGebra, viz (1).

Na VŠTE v Českých Budějovicích jsou funkce více proměnných probírány v předmětu Matematika III. Vytvořené anaglyfy lze použít pro jakýkoliv základní kurz matematiky obsahující kalkulus funkcí více proměnných.

Výhody anaglyfů a GeoGebry ve výuce: (9)

- anaglyfy umožňují prostorový 3D náhled, ostatní zobrazení jsou jen průměty třírozměrné situace do plochy, kvalitnější vizualizace problému
- atraktivní prezentace, nutno nasadit 3D brýle - znají z kina (3D filmy),
- spojení s prožitkem něčeho neobvyklého,

- ovládání GeoGebry 3D a tvorba anaglyfů jsou velmi jednoduché (intuitivní) jak pro vyučujícího, tak pro studenta,
- GeoGebra umožňuje nahlížet na vytvořený anaglyf ze všech stran, zvětšení či zmenšení obrázku, postupná rotace (je možné zkoumat tvar funkce detailně),
- GeoGebra je volně šiřitelná – studenti si ji mohou stáhnout a sami vyzkoušet.

1 Stereoskopická projekce a anaglyfy

Anaglyf je jedna ze stereoskopických technik, která umožňuje uživateli prostorově vnímat obrazy, fotografie, grafy, filmy, mapy a další grafická díla.

Stereoskopická projekce je z hlediska deskriptivní geometrie dvoustředové promítání. Vznikají dva obrazy, každý je promítnut z jiného středu. Vzdálenost středů promítání je 6,5 cm. Tato vzdálenost je odvozena od průměrné vzdálenosti středů očí u člověka. Za pomoci stereoskopické projekce vytvoříme pro každé oko jiný obraz. Prostorový dojem vzniká složením těchto obrazů v mozku. Objevuje se dojem hloubky, tj. 3D obraz.

Vždy je potřeba zajistit, aby každé oko vnímalo jen obraz pro něj určený. Tedy k oběma obrazům musíme přidat nějaké zařízení na prohlížení.

Možností jak pracovat se stereoskopickými technikami je několik. Už v 19. století byla využívána krabice, na jejíž zadní straně byly dva obrazy. Tyto byly odděleny přepážkou a do krabice vedla 2 kukátka. Každé oko se dívalo na jiný obraz a tím byl získán prostorový dojem. Po vynálezu fotografie byl vyvinut stereoskopický fotoaparát. Jedná se vlastně o dva spojené fotoaparáty se vzdáleností ohnisek 6,5 cm. Při zmáčknutí spouště jsou zároveň vytvořeny 2 fotografie ve stereoskopické projekci.

Další možnost využití byly stereoskopické kotoučky. Na kotoučku je 7 dvojic fotografií, které za použití prohlížečky vytvoří 7 prostorových obrazů. Tyto kotoučky byly populární zejména v 2. polovině 20. století. Kotoučky a prohlížečky vyrábělo několik firem v různých státech a mimo jiné i firma Meopta (v tehdejší ČSSR). Podrobnější informace o stereokotoučkách, jejich výrobě u nás i ve světě naleznete na stánkách (5).

Jedna z nejznámějších a nejpoužívanějších stereoskopických technik je anaglyf. Anaglyfy jsou opět tvořeny dvoustředovým promítáním. Na rozdíl od předchozích technik jsou oba obrazy promítnuty na jednu průmětnu, každý průmět je znázorněn jinou barvou.

Nejčastěji se k tvorbě anaglyfů používá červená a modrozelená (2). K prohlížení takto vytvořených obrazů se používají anaglyfické brýle. Jedno okénko v brýlích má modrozelenou barvu a druhé červenou. Těmito barevnými filtry odstíníme pro každé oko jiný průmět. Opět nastane situace, že každé oko vnímá jiný obraz a ty se složí v mozku do 3D náhledu.

Anaglyfy jsou v dnešní době využívány k tvorbě 3D filmů, knih, fotografií, ... Vědci je využívají k tvorbě map, např. (6). Mají široké využití ve výuce, viz (4) a (9).

Vzhledem k pokročilým schopnostem výpočetní techniky lze anaglyfy konstruovat poměrně snadno. Jedním ze softwarů, který umožňuje anaglyfy tvořit pro potřeby výuky matematiky, je GeoGebra (1), (4) a (9).

2 Anaglyfy funkcí dvou proměnných

V této části prezentujeme vytvořené grafy funkcí dvou proměnných. Pro srovnání uvádíme graf 2D a anaglyf (3D graf). Zaměříme se takové funkce, které mají nějaké lokální extrémy nebo sedlový bod.

Problematika hledání extrémů (minima, maxima) popřípadě sedlového bodu je náročná. K hledání těchto objektů využíváme diferenciální počet funkcí více proměnných. Jak najít extrémy funkcí více proměnných je uvedeno v (3), (7) a (8).

Výpočet parciálních derivací a postup hledání minim, maxim a sedlových bodů je velmi technického rázu. Z tohoto důvodu a díky nedostatečným znalostem v oblasti analytické geometrie studenti zanedbávají geometrický pohled na problém a soustředí se především na techniku výpočtu. Toto lze jednoduše napravit atraktivní vizualizací problémů, viz vytvořené grafy funkcí. Jako první vždy uvádíme pro srovnání obyčejný 2D náhled (průmět grafu) a jako druhý vytvořený anaglyf (3D při použití anaglyfických brýlí s červeným a modrozeleným filtrem).

Příklad 1: Funkce $f_1(x, y) = -(x^2 + y^2) + 4$ obsahující jedno lokální maximum v bodě definičního oboru $[0;4]$.

Obr. 1 – Lokální maximum (zdroj: autoři)

Příklad 2: Funkce $f_2(x, y) = x^2 - y^2$, která nemá extrém, ale má sedlový bod v bodě definičního oboru $[0;0]$.

Obr. 2 – Sedlový bod (zdroj: autoři)

Příklad 3: Funkce $f_3(x, y) = x^2 + y^2 - \ln xy - \frac{3}{2}$ má dvě lokální minima v bodech $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Obr. 3 – Dvě minima (zdroj: autoři)

Příklad 4: Funkce $f_4(x, y) = \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 1}$ má jedno lokální minimum $[-1; 0]$ a jedno lokální maximum $[1; 0]$.

Obr. 4 – Dva extrémy – minimum a maximum (zdroj: autoři)

Závěr

Anaglyfické zobrazení funkce dvou proměnných umožňuje prostorový náhled na tyto funkce. Jedná se o velice kvalitní vizualizaci, která umožňuje „uvidět také hloubku“. Použití anaglyfických brýlí je pro studenty atraktivní a ve výuce neobvyklé. Tedy se jedná o výuku s prožitkem. Vizualizace částečně odstraní neschopnost studentů propojit algebraický zápis s geometrickou představou. Také ilustruje početně náročný problém hledání lokálních extrémů funkce.

Literatura

1. INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE. *Geogebra*. [online]. [cit. 11-12-2015]. Dostupné z: <http://www.geogebra.org/>
2. FRED WILDER STUDIO. *Anaglyph 3D know-how by Fred Wilder*. [online]. [cit. 11-12-2015]. Dostupné z: <http://stcroixstudios.com/wilder/anaglyph/whatsanaglyph.html>
3. JIRÁSEK, F., ČIPERA, S., VACEK, M. *Sbírka řešených příkladů z matematiky II*. SNTL. 1989. ISBN 04-025-89
4. KMEŤOVÁ, M. *Rediscovered Anaglyph in Program GeoGebra*. Acta Mathematica Nitriensia, Vol. 1, No. 1, s. 86 – 91. 2015. ISSN 2453-6083
5. KOPAL, M. *Stereokotoučky*. [online]. [cit. 11-12-2015]. Dostupné z: <http://www.stereokotoucky.cz/index.html>
6. LUNAR AND PLANETARY INSTITUTE. [online]. [cit. 11-12-2015]. Dostupné z: <http://www.lpi.usra.edu/>
7. STEWARD, J. *Calculus. Early transcendentals*. Brooks Cole. 2012. ISBN 978-0-538-49887-6

8. VARGA, M. *Zbierka úloh z matematickej analýzy*. Nitra: UKF. 2010. ISBN 978-80-8094-712-5
9. VARGOVÁ, M., SMETANOVÁ, D., BABULAK, E. Visualisation of Functions of Two Variables by Anaglyphs In *15th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT 2016*. 1. vyd. Bratislava: STU Bratislava, 2016. s. 1078-1083. ISBN 978-80-227-4531-4

Kontaktní adresa:

Dana Smetanová, RNDr., Ph.D.,

Katedra informatiky a přírodních věd, Ústav technicko-technologický, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, e-mail: smetanova@mail.vstecb.cz

Michaela Vargová, Mgr., Ph.D.,

Katedra informatiky a přírodních věd, Ústav technicko-technologický, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, e-mail: vargova@mail.vstecb.cz

Vladislav Biba, Mgr., Ph.D.,

Katedra informatiky a přírodních věd, Ústav technicko-technologický, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, e-mail: biba@mail.vstecb.cz