VIZUALIZACE DIFERENCIÁLU FUNKCE

KRIEG Jaroslav, CZ

Resumé

Článek popisuje jak pomocí GeoGebry geometricky znázornit pojem diferenciálu funkce a tím zpřístupnit tento pojem studentům v základním kurzu matematiky na VŠ. V závěru článku je uvedeno několik příkladů na aplikaci diferenciálu funkce.

Klíčová slova: diferenciál funkce, difference, geometrický význam diferenciálu, freeware GeoGebra, aproximace funkce

VISUALIZATION OF DIFFERENTIAL FUNCTION

Abstract

The article describes how to use GeoGebra geometrically illustrate the concept of differential function and thereby make this concept to students in the basic course of mathematics at the university. The article concludes with a few examples of the application of differential.

Key words: differential of function, difference, geometric interpretation of differential, freeware GeoGebra, approximation of function

Úvod

Pojem diferenciálu funkce je často studentům nejasný nebo dokonce úplně nesrozumitelný a v lepším případě s ním studenti pracují zcela formálně podle definice bez nějaké další názorné představy. V článku jsem použil freeware GeoGebra, který je dle mého soudu vhodným nástrojem pro objasnění tohoto pojmu a vytvoření jeho geometrické představy.

1 Diferenciál funkce

Vyjděme z obvyklé matematické definice diferenciálu funkce v bodě (KAŇKA, 2007) resp. (MUSILOVÁ, 2009).

Definice Necht' funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 vlastní derivaci (tj. existuje $f'(x_0) \in \mathbb{R}$).

Diferenciálem funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 při změně argumentu o hodnotu $h \in \mathbb{R}$ rozumíme číslo

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h \quad (1.1)$$

Poznámky:

1) Existence vlastní první derivace $f'(x_0)$ je nutnou a zároveň postačující podmínkou pro existenci diferenciálu v bodě x_0 .

2) Diferenciál funkce v daném bodě vyjadřuje závislost změny hodnoty funkce na změně jejího argumentu a aproximuje ji jako přímou úměrnost v okolí zvoleného bodu.

3) Vyjdeme-li ze vzorce

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

pro derivaci funkce $y = f(x)$ definované v jistém δ -okolí bodu x_0 , tj. v intervalu $I = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$, můžeme tento vzorec přepsat do tvaru

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(h),$$

kde $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ v uvedeném intervalu I , tj. platí

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + h \cdot \varepsilon(h).$$

Pro malé hodnoty $|h| \neq 0$ lze přibližně psát

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot h.$$

Součin $f'(x_0) \cdot h$ se nazývá **diferenciál funkce** $y = f(x)$ a značí se $df(x_0)$ a tudíž můžeme psát

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h.$$

4) Speciálně pro libovolný vnitřní bod x z definičního oboru dané funkce f , ve kterém existuje vlastní derivace, píšeme

$$df(x) = f'(x) \cdot h \tag{1.2}$$

a protože pro identickou funkci $f(x) = x$ platí $df(x) = 1 \cdot h = h = dx$, neboť h je přírůstek nezávisle proměnné x .

Obvykle proto zapisujeme diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x ve tvaru

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot dx, \tag{1.3}$$

což dává smysl zápisu derivace funkce f jako podílu diferenciálů závisle proměnné y a nezávisle proměnné x ve tvaru

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

2 Geometrický význam diferenciálu

Pojem diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 lze jednoduše geometricky znázornit, jak ukazuje obrázek 1, který v dynamické podobě nalezneme na webových stránkách programu GeoGebra, viz <https://www.geogebra.org/material/simple/id/3113291> (KRIEG, 2016).

Obr. 1 – Diferenciál funkce (<https://www.geogebra.org/material/simple/id/3113291>)

Vyjďeme z rovnice tečny t v dotykovém bodě A a sledujme, jak se změní souřadnice y bodu B na tečně t , pokud jeho souřadnice x vzroste z x_0 na $x_0 + h$.

Směrnice tvar rovnice tečny je vyjádřen vztahem

$$y = k \cdot x + q,$$

kde k je směrnice tečny, pro kterou platí (viz obr. 1)

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{h} = f'(x_0)$$

a protože bod $A = [x_0, y_0] \in t$, kde $y_0 = f(x_0)$, pak platí

$$y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + q$$

a tím pádem

$$q = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Nyní již můžeme zapsat rovnici tečny t v následujícím tvaru

$$t: y = f'(x_0) \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0 \text{ nebo}$$

$$t: y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ a nebo}$$

$$t: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0.$$

Zřejmě každý libovolný bod $X = [x, y] \in t$ se souřadnicemi x, y vyhovuje rovnici tečny

$$t: y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

tj. speciálně pro bod $B = [x_0 + h, y] \in t$ obdržíme

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot h.$$

Rozdíl (diference) y – ových souřadnic bodů A a B , které leží na tečně t je rovný velikosti úsečky BD na obr. 1. Tato specifická difference se nazývá *diferenciál funkce* f , který značíme symbolem df nebo dy a nebo přesněji $df(x_0)$ (viz definice (1.1) a obr. 1). Označení diferenciálu symbolem dy nejlépe vystihuje fakt, že jsme vyšli ze změn y – ových souřadnic bodů A, B , resp. D, B .

Použijeme-li dynamický obr. 1, pak tažením červeného pohyblivého bodu E doleva názorně demonstrujeme přímou úměrnost diferenciálu v závislosti na velikosti přírůstku $h > 0$ argumentu x funkce f a zároveň ukazujeme, že $dy \propto \Delta y$, což při $h \rightarrow 0$ znamená, že $\Delta y - dy \rightarrow 0$. Zároveň graficky i početně obr. 1 objasňuje fakt, že $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ a to znamená, že naše aproximace je pro

malé $h > 0$ velmi dobrá. Jinak řečeno s použitím vztahu (1.2), resp. (1.3) a obr. 1 lze hodnotu funkce $y = f(x)$ v okolí bodu x_0 vyjádřit vztahem

$$f(x_0 + dx) = y_0 + dy + \varepsilon,$$

kde $y_0 = f(x_0)$, $dy = f'(x_0) \cdot dx$, $dx = h$ a ε je chyba aproximace, která je pro malé $dx = h$ velmi malá, tj. $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0$.

Posouváním bodu A doprava v dynamickém obr. 1 můžeme předešlé závěry graficky ověřit pro různé body dotyku, tj. pro různé hodnoty směrnice tečny v dotykovém bodu A .

Příslušné výpočty probíhají přímo v dynamické podobě obr. 1.

3 Užití diferenciálu

a) Derivaci funkce určujeme jako podíl diferenciálů veličiny závisle a nezávisle proměnné, tj.

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Je-li závislost proměnných x, y dána dvěma parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, pak platí $dx = \varphi'(t) \cdot dt$, $dy = \psi'(t) \cdot dt$, a proto

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t) \cdot dt}{\varphi'(t) \cdot dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

Určeme například směrnici tečny elipsy zadané parametricky $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, pak

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{b \cdot \cos t \cdot dt}{-a \cdot \sin t \cdot dt} = -\frac{b}{a} \cdot \cotg t.$$

b) Diferenciál dy funkce $y = f(x)$ často používáme pro stanovení chyby, které se dopustíme, když při výpočtu hodnoty funkce užijeme hodnotu argumentu x s chybou o velikosti Δx . Chyba o velikosti Δx totiž způsobí *absolutní chybu* $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ funkční hodnoty. Přírůstek Δy nahrazujeme diferenciálem $dy = y' dx$, který je obvykle snáze vypočitatelný (pomocí derivace y') než Δy . Častěji však místo absolutní chyby $\Delta y = dy$ určujeme *relativní chybu* jako poměr absolutní chyby k hodnotě funkce, tj.

$$\frac{dy}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx.$$

Určeme například, jaké relativní chyby se dopustíme při výpočtu povrchu, resp. objemu koule, změříme-li její poloměr r s chybou velikosti nejvýše dr .

$$\frac{dS}{S} = \frac{8\pi r \cdot dr}{4\pi r^2} = 2 \frac{dr}{r}, \text{ resp. } \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 \cdot dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3 \frac{dr}{r},$$

takže je-li relativní chyba v určení poloměru 1 %, je relativní chyba u povrchu 2 %, resp. u objemu 3 %.

c) Pomocí diferenciálů můžeme určit derivaci implicitně zadané funkce $F(x, y) = 0$ tak, že každý člen dané rovnice obsahující x derivujeme podle x a vynásobíme dx a obsahuje-li y , pak ho derivujeme podle y a vynásobíme diferenciálem dy . Součet všech těchto součinů položíme rovný nule a z této rovnice určíme $\frac{dy}{dx} = y'$.

Určeme derivaci implicitně zadané funkce $x^3 + y^3 - axy = 0$. Podle výše uvedeného můžeme psát $3x^2 \cdot dx + 3y^2 \cdot dy - ay \cdot dx - ax \cdot dy = 0$ a nyní vyjádříme hledanou derivaci

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - ay}{ax - 3y^2}.$$

d) V „blízkém“ okolí bodu 0 můžeme funkci $y = \sin x$ aproximovat jejím diferenciálem, tj. $d(\sin x) = (\sin x)' \cdot dx = \cos x \cdot dx$, speciálně pro bod $x_0 = 0$ je $d(\sin 0) = (\cos 0) \cdot dx = 1 \cdot dx = dx = x$. V „blízkém“ okolí nuly lze funkci $y = \sin x$ dobře aproximovat funkcí $y = x$ a tato skutečnost implikuje, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Závěr

Článek připomíná, že pojem diferenciálu funkce je z metodického hlediska dobře geometricky znázornitelný pomocí programu GeoGebra, který je snadno a bezplatně dostupný všem zájemcům.

Ve výuce lze vhodně využít přiložený dynamický obrázek, viz <https://www.geogebra.org/material/simple/id/3113291> (KRIEG, 2016), který je těžištěm tohoto článku.

Ve třetí části článku je pak text doplněn několika příklady ilustrujícími užití diferenciálu jako jedné z aproximačních metod.

Literatura

1. KAŇKA, M., COUFAL, J. a J. KLŮFA, 2007. Úvod do diferenciálního počtu reálných funkcí jedné reálné proměnné. In: *Učebnice matematiky pro ekonomy*. Praha: Ekopress, 109 s. ISBN 978-80-86929-24-8.
2. MUSILOVÁ, J. a P. MUSILOVÁ, 2009. Funkce jedné proměnné. In: *Matematika I pro porozumění i praxi ... 2.*, doplněné vydání. Brno: VUTIUM, s. 127-130. ISBN 978-80-214-3631-2.
3. HOHENWARTER, M. a J. HOHENWARTER, 2013. *Introduction to GeoGebra* [online]. [Linz]: International GeoGebra Institute, 2013-11-23 [cit. 12. 4. 2016]. Dostupné z: <http://static.geogebra.org/book/intro-en.pdf>.
4. KRIEG, J., 2016. Vizualizace diferenciálu funkce [online]. GeoGebraTube, 2016-04-07 [cit. 2016-04-12]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/material/simple/id/3113291>.

Kontaktní adresa:

Jaroslav Krieg, RNDr.,

Katedra informatiky a přírodních věd, Ústav technicko-technologický, Vysoká škola technická a ekonomická v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice, ČR, tel.: +420 387 842 140, e-mail: krieg@mail.vstecb.cz