KONSTRUKCE ELIPSY ODVOZENÉ Z PROSTORU

CHODOROVÁ Marie – JUKLOVÁ Lenka, CZ

Resumé

Článek je věnován konstrukcím elipsy ze zadaných prvků. Mezi méně známé konstrukce kuželoseček patří konstrukce odvozené z prostoru, většinou se kuželosečky sestavují pomocí ohniskových vlastností nebo na základě kolineace mezi kružnicí a kuželosečkou. Konstrukce elips v jednotlivých úlohách jsou řešeny pomocí vztahů odvozených z prostoru. Ve všech úlohách známe střed elipsy a další prvky – body a tečny konstruované elipsy. Ke konstrukci elips jsou využívány řezy na vhodně zvolené rotační válcové ploše, která je zobrazena v kótovaném promítání.

Klíčová slova: elipsa, sdružené průměry elipsy, řez válcové plochy.

CONSTRUCTIONS OF ELLIPSE DERIVED FROM SPACE

Abstract

This article is devoted to the construction of an ellipse of given elements. Among the less known construction of the conic section include the structures derived from the space, mostly conic constructs are made through focus properties or based on collineation between circle and conic. Construction of ellipses in individual tasks are solved using a relationship derived from space. In all tasks we know the center of the ellipse and other elements – points and tangents of constructed ellipse. To constructions of ellipses there are used sections on an appropriately chosen rotating cylindrical surface which is displayed at the listed projection.

Key words: ellipse, conjugate diameters of ellipse, section of the cylindrical surface.

Úvod

Budeme se zabývat konstrukcemi elipsy ze zadaných prvků; ke konstrukcím využijeme řez rotační válcové plochy rovinou, přičemž konstrukce provádíme v kótovaném promítání a osa rotační válcové plochy leží v průmětně, pracujeme v rozšířeném euklidovském prostoru $\bar{E}_3$. V úloze 1 ukážeme konstrukci řezu takové rotační válcové plochy danou rovinou; na uvedenou konstrukci se v dalších úlohách budeme odvolávat.

Jedna z úloh využívá při řešení polárních vlastností elipsy a rotační válcové plochy. Předpokládáme, že čtenář je seznámen s pojmy pól a polára kuželosečky, resp. pól a polární rovina kvadriky (více např. v [2], [3]), v úvodu článku jsou některé polární vlastnosti připomenuty.

1 Polární vlastnosti

Uvažujme elipsu e a její vnější bod P (Obr. 1). Sestrojíme-li z bodu P tečny k elipse e , pak přímka p určená body dotyku obou tečen je polára bodu P vzhledem k elipse e . Zvolme libovolně bod Q , $Q \in p$ tak, aby byl rovněž vnějším bodem elipsy e . Polára q bodu Q vzhledem k elipse e je také určena body dotyku tečen elipsy e vedených bodem Q . Platí $Q \in p \Rightarrow P \in q$. Označíme $R = p \cap q$. Potom přímka $r = PQ$ je polárou bodu R vzhledem k elipse e . Trojúhelník PQR je tzv. polárním trojúhelníkem elipsy e (více např. v [2]).

V jedné z úloh využíváme k řešení také polárních vlastností rotační válcové plochy. Uvažujme rotační válcovou plochu Ω s osou o a její vnější bod M (Obr. 2). Z bodu M vedeme tečné roviny rotační válcové plochy. Tyto roviny se dotýkají rotační válcové plochy podél povrchových přímek

a, b . Přímkami a, b je určena rovina μ , která je polární rovinou bodu M vzhledem k rotační válcové ploše Ω .

Obr. 1: Polární vlastnosti elipsy

Rotační válcová plocha je souměrná podle každé roviny procházející její osou, je tedy souměrná i podle roviny $\rho = (o, M)$. Polární rovina bodu M vzhledem k Ω je určena přímkami a, b , které jsou souměrně sdružené podle ρ , tj. $\mu \perp \rho$.

Pro kvadriky platí (viz např. [3]): Má-li kvadrika singulární body, pak polární rovina μ každého bodu M prostoru (který není singulárním bodem dané kvadriky) vzhledem k dané kvadrice obsahuje všechny singulární body této kvadriky.¹ Rotační válcová plocha Ω obsahuje bod O^∞ , který je jejím singulárním bodem. Polární roviny všech bodů prostoru různých od O^∞ vzhledem k Ω tedy procházejí bodem O^∞ .²

Obr. 2: Polární vlastnosti rotační válcové plochy

Uvažujme rovinu σ procházející bodem M , která není rovnoběžná s osou o rotační válcové plochy. Rovina σ protíná válcovou plochu Ω v elipse e a rovinu μ v přímce m . Potom m je polárou

¹ Množina singulárních bodů kvadriky se nazývá vrchol kvadriky.

² Což pro rotační válcovou plochu Ω znamená, že polární rovina μ každého bodu $M \neq O^\infty$ vzhledem k ploše Ω je rovnoběžná s osou o plochy Ω .

bodu M vzhledem k elipse e . Zvolme bod $Q \in m$ tak, aby byl vnitřním bodem elipsy e . Sestrojme poláru q bodu Q vzhledem k elipse e , zřejmě $M \in q$. Přímka q leží v polární rovině α bodu Q vzhledem k ploše Ω (tedy $q = \alpha \cap \sigma$). Bod Q není singulárním bodem rotační válcové plochy Ω , polární rovina α bodu Q vzhledem k ploše Ω je rovnoběžná s osou o plochy, tj. je určena přímkami q, t kde t je průsečnice tečných rovin plochy Ω vedených bodem M .

2 Řešené úlohy

Úloha 1 V kótovaném promítání zobrazte řez rotační válcové plochy s osou o ležící v π rovinou $\sigma \equiv (p^\sigma, \alpha)$, kde p^σ je stopa roviny řezu a α je její odchylka od průmětny. (Obr. 3).

Řešení: Rotační válcová plocha, jejíž osa o leží v průmětně π , se v kótovaném promítání zobrazí jako pás omezený rovnoběžkami a_1 a a'_1 , přímky a, a' jsou povrchové přímky této rotační válcové plochy ležící v π . Rovina řezu σ je určena půdorysnou stopou p^σ a odchylkou α od průmětny π . Podle Quételet–Dandelinovy věty řezem bude elipsa, jejímž průmětem bude rovněž elipsa, kterou zobrazíme pomocí sdružených průměrů.

V průmětně leží půdorysná stopa p^σ roviny σ a povrchové přímky a, a' dané rotační válcové plochy. Jeden průměr elipsy e s krajními body A, A' bude tedy ležet na přímce p^σ , přičemž $A = a \cap p^\sigma, A' = a' \cap p^\sigma$. Tento průměr je průměrem řezu a současně i průměrem průmětu řezu. Najdeme průměr PQ k němu sdružený.

Obr. 3: Řešení úlohy 1

Víme, že dva průměry elipsy jsou sdružené právě tehdy, když tečny v krajních bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem. Přímky a, a' jsou skutečným obrysem a jejich průměty a_1, a'_1 zdánlivým obrysem rotační válcové plochy, elipsa řezu leží na rotační válcové ploše, tedy a_1, a'_1 jsou tečnami průmětu elipsy řezu. Hledáme průměr PQ elipsy řezu, jehož průmět P_1Q_1 je rovnoběžný s přímkami a_1, a'_1 .

Průměr PQ bude ležet v rovině λ , která obsahuje osu o válcové plochy a je kolmá k průmětně π , tedy jejím průmětem je přímka. Rovina λ protíná danou válcovou plochu ve dvou povrchových

přímkách p , p' a rovinu řezu σ v přímce m . Krajní body P , Q hledaného průměru určíme jako průsečíky přímky m s povrchovými přímkami p , p' . Rovina λ je kolmá k průmětně, sklopíme ji a ve sklopení určíme hledané body P , Q . Přímky p , p' se sklopí do přímek, které splynou s prvními průměty přímek a , a' . Přímku m sklopíme pomocí libovolného bodu L , jehož z -tovou souřadnici určíme pomocí odchylky roviny σ od průmětny.

Určíme sklopené body (P) , (Q) , $(P) = (m) \cap (p')$, $(Q) = (m) \cap (p)$. Body P_1, Q_1 leží na m_1 a P_1Q_1 je obrazem průměru PQ . Průmět řezu je určen průměty sdružených průměrů $A_1A'_1$ a P_1Q_1 .

Předcházející úlohy můžeme použít k sestrojení elipsy, která je dána tečnou a , středem S a dalšími dvěma prvky (body, tečna, bod a tečna). Pro jednoduchost konstrukce, která ovšem neubírá na obecnosti, volíme ve všech následujících úlohách za průmětnu rovinu π , která bude určena tečnou a a bodem S .

Využijeme následující úvahy: Mějme danu tečnu a elipsy a její střed S , k dané tečně a sestrojíme tečnu a' souměrnou podle středu S . Rovnoběžné přímky a , a' můžeme považovat za obrysové přímky rotační válcové plochy s osou o ležící v průmětně π a hledanou elipsu e_1 za kolmý průmět elipsy e , v níž jistým způsobem určená rovina σ protíná rotační válcovou plochu. Abychom vyjádřili, že na každý daný prvek pohlížíme jako na kolmý průmět bodu nebo přímky, připojíme předem v dané úloze ke každému prvku index 1.

Je zřejmé, že nemůžeme dané prvky volit zcela libovolně, poněvadž ve všech úlohách jde o sestrojení elipsy. Aby diskuse každé z úloh nebyly příliš dlouhé a tím i nepřehledné, předepíšeme daným prvkům již v zadání určitou vzájemnou polohu. Přitom budeme mlčky pokládat za samozřejmé, že střed elipsy nemůže být incidentní s její tečnou, nebo jsou-li dány bod a tečna elipsy, potom nejsou spolu incidentní, apod.

Úloha 2 Sestrojte elipsu, je-li dána tečna a_1 , střed S_1 a body B_1, C_1 , které nejsou s bodem S_1 kolineární. (Obr. 4)

Řešení

Rozbor: Sestrojíme přímku a'_1 , která je souměrná s přímkou a_1 podle bodu S_1 . Tyto přímky jsou průměty obrysových přímek rotační válcové plochy s osou o ležící v půdorysně π . Body B_1, C_1 jsou pravoúhlé průměty bodů B, C této válcové plochy. Bod S_1 je pravoúhlým průmětem středu S jisté elipsy e , která je řezem válcové plochy rovinou σ . Rovina σ je jednoznačně určena body B, C, S . Pravoúhlým průmětem elipsy e je konstruovaná elipsa e_1 .

Konstrukce: Nejprve sestrojíme stopu p^σ roviny σ . Stopa roviny σ prochází bodem S a dále bodem M , což je stopník přímky BC , který určíme sklopením promítací roviny této přímky.³ Dále sestrojíme průměr $A_1A'_1$ pravoúhlého průmětu řezu, což je průměr konstruované elipsy e_1 , konkrétně body A_1, A'_1 určíme jako průsečíky tečen a_1, a'_1 se stopou p^σ . V posledním kroku sestrojíme průměr P_1Q_1 stejně jako v úloze 1.

Diskuse:

- Jsou-li body B_1, C_1 vnitřní body pásu a_1, a'_1 , pak body $B, C \notin \pi$ a úloha má dvě řešení. Body B, C mohou mít vzhledem k průmětně π celkem čtyři různé polohy. Přiřadíme-li souřadnicím bodů B, C nad průmětnou π znaménko (+), pod průmětnou π znaménko (−), pak jsou to tyto případy: i) ++, ii) − −, iii) + −, iv) − +. Ze souměrnosti podle průmětny π plyne, že vždy dva případy (tj. i) a ii), iii) a iv)) dávají jedno řešení. Na Obr. 4 leží body B, C v tomtéž poloprostoru určeném průmětnou.
- Je-li jeden z bodů B_1, C_1 vnitřním bodem pásu a_1, a'_1 a druhý leží na a'_1 , má úloha jen jedno řešení.

³ Kóty bodů B, C lze snadno zjistit z předpokladu, že body B, C leží na dané rotační válcové ploše. Řešení závisí na tom, zda leží oba v tomtéž poloprostoru určeném průmětnou, nebo v poloprostorech opačných.

- c) Leží-li oba body B_1, C_1 na a'_1 , nebo B_1 leží na a_1 a C_1 leží na a'_1 ⁴, nebo je-li jeden z bodů B_1, C_1 vnějším bodem pásu a_1, a'_1 , pak úloha nemá žádné řešení.

Obr. 4: Řešení úlohy 2

Úloha 3 Sestrojte elipsu, jsou-li dány dvě její různoběžné tečny a_1, b_1 , střed S_1 a bod C_1 . (Obr. 5)

Řešení

Rozbor: Sestrojíme přímku a'_1 , která je souměrná s přímkou a_1 podle bodu S_1 . Přímky a, a' jsou obrysové přímky rotační válcové plochy s osou o ležící v půdorysně π . Bod C_1 je pravoúhlým průmětem bodu C válcové plochy a b_1 je pravoúhlým průmětem jisté tečny b válcové plochy. Bod S_1 je pravoúhlým průmětem středu S jisté elipsy e , která je řezem válcové plochy rovinou σ . Rovina σ je jednoznačně určena body C, S a přímkou b . Pravoúhlým průmětem elipsy e je konstruovaná elipsa e_1 .

Konstrukce: Nejprve sestrojíme stopu p^σ roviny σ . Stopa roviny σ prochází bodem S a dále bodem M , což je stopník tečny b , který určíme ve sklopení promítací roviny přímky b do průmětny π . Abychom mohli sklopit přímku b , potřebujeme také určit z -tovou souřadnici bodu R , který je průsečíkem přímky b s přímkou CS .⁵

⁴ Body B_1, C_1, S_1 jsou nekolineární.

⁵ Sklopíme přímku CS , bod S je její stopník, kótu bodu C známe – bod C leží na válcové ploše, ve sklopení najdeme kótu bodu R .

Uvažujme rovinu μ kolmou k průmětně a obsahující přímku b . Rovina μ protne rotační válcovou plochu v elipse g , tečnou elipsy g je zřejmě přímka b . Rovinu μ sklopíme – sklopená přímka b je tečnou sklopené elipsy g procházející bodem R , přímka b se elipsy g dotýká v bodě B .⁶

Dále postupujeme stejně jako v úloze 1, tj. sestrojíme průměr $A_1A'_1$ pravouhlého průmětu řezu, což je průměr konstruované elipsy e_1 . Body A_1, A'_1 určíme jako průsečíky tečen a_1, a'_1 se stopou p^σ . V posledním kroku sestrojíme průměr P_1Q_1 sdružený s průměrem $A_1A'_1$ (opět stejně jako v úloze 1).

Obr. 5: Řešení úlohy 3

Diskuse:

- a) Leží-li bod C_1 uvnitř rovnoběžníku určeného rovnoběžkami a_1, a'_1 a b_1, b'_1 , kde b'_1 je přímka souměrná s přímkou b_1 podle středu S_1 , a mimo jeho úhlopříčky, úloha má dvě řešení (z bodu R lze vést dvě tečny k elipse g , dostáváme tak řešení pro různé polohy přímky b a bodu C). Leží-li C_1 na jedné z úhlopříček výše uvedeného rovnoběžníku, potom v jednom ze dvou řešení je přímka b kolmá k π a v tomto případě je jedním z řešení úsečka e_1 – úhlopříčka rovnoběžníku, na níž leží bod C_1 . Ze souměrnosti podle π dávají vždy dva případy jedno řešení. Na Obr. 5 je uvedeno řešení pro jednu ze dvou různých tečen elipsy g (žádná z nich není kolmá k π).

⁶ Z bodu $[R]$ vedeme tečnu k elipse $[g]$, dotýká se v bodě $[B]$.

b) Je-li C_1 incidentní s jednou z přímek a'_1, b'_1 , má úloha jen jedno řešení.

c) Padne-li bod C_1 do průsečíku přímek a'_1, b'_1 , nebo je-li bod C_1 vnějším bodem rovnoběžníku určeného rovnoběžkami a_1, a'_1 a b_1, b'_1 , pak úloha nemá žádné řešení.

Úloha 4 Sestrojte elipsu, je-li dán střed S_1 a tři navzájem různoběžné tečny a_1, b_1, c_1 neprocházející jedním bodem. (Obr. 6)

Řešení

Rozbor: Sestrojíme přímku a'_1 , která je souměrná s přímkou a_1 podle bodu S_1 . Tyto přímky jsou průměty obrysových přímek rotační válcové plochy s osou o ležící v půdorysně π . Přímky b_1, c_1 jsou pravoúhlé průměty jistých tečen b a c této válcové plochy. Bod S_1 je pravoúhlým průmětem středu S jisté elipsy e , která je řezem válcové plochy rovinou σ a jejími tečnami jsou přímky b, c , obě přímky tedy leží rovněž v rovině σ . Rovina σ je jednoznačně určena.

Obr. 6: Řešení úlohy 4

Tečna b leží také v rovině β , která je kolmá k průmětně π a protíná válcovou plochu v elipse g , tečna c leží v rovině γ , která je kolmá k průmětně π a protíná válcovou plochu v elipse h .⁷ Elipsy g, h leží na kuželové ploše Φ s vrcholem W , který leží v průmětně π .⁸ Rovina σ určená přímkami b, c je současně tečnou rovinou ke kuželové ploše Φ obsahující elipsy g, h . Pravoúhlým průmětem elipsy e , která je řezem roviny σ a válcové plochy, je konstruovaná elipsa e_1 .

⁷ Bod dotyku B , resp. C , přímky b , resp. c , a elipsy g , resp. h , je rovněž bodem dotyku přímky b , resp. c , a válcové plochy.

⁸ Platí věta: Každé dvě různé kuželosečky kvadriky leží na dvou kuželových plochách. Spojnice jejich vrcholů je polárně sdružená s průsečnicí rovin daných kuželoseček. Důkaz např. v [4]. K řešení využijeme jednu z těchto kuželových ploch. Kuželosečky g i h jsou souměrné podle π a jejich středy leží na ose o válcové plochy, zřejmě vrcholy obou kuželových ploch leží rovněž na o .

Konstrukce: Vrchol W kuželové plochy Φ sestrojíme jako průsečík přímek 14 a 23, přičemž $1 = a_1 \cap b_1$, $2 = a'_1 \cap b_1$, $3 = a'_1 \cap c_1$ a $4 = a_1 \cap c_1$. Rovina σ obsahuje body W a S které oba leží v π , tj. $p^\sigma = WS$. Podle úlohy 1 sestrojíme průměr $A_1A'_1$ pravoúhlého průmětu řezu, což je průměr konstruované elipsy e_1 . Body dotyku tečen b_1 a c_1 elipsy e_1 sestrojíme stejně jako v úloze 3. V posledním kroku sestrojíme průměr P_1Q_1 sdružený s průměrem $A_1A'_1$ stejně jako v úloze 1.

Diskuse:

- a) Uvažujme přímky a'_1, b'_1, c'_1 souměrné po řadě s tečnami a_1, b_1, c_1 podle bodu S_1 .

Je-li šestiúhelník 123456, kde $1 = a_1 \cap b_1$, $2 = b_1 \cap c_1$, $3 = a'_1 \cap b_1$, $4 = a_1 \cap b'_1$, $5 = b'_1 \cap c'_1$, $6 = a_1 \cap c'_1$ konvexní, úloha má jediné řešení.

- b) Je-li uvedený šestiúhelník nekonvexní, pak úloha nemá žádné řešení.

Úloha 5 Sestrojte elipsu, jsou-li dány tři její body A_1, B_1, C_1 a střed S_1 tak, že žádné tři body neleží v přímce. (Obr. 7)

Řešení

Rozbor: Předpokládejme, že bod S a některý z dalších zadaných bodů, např. bod A , leží v průmětně π . Body A_1 a S_1 jsou jejich pravoúhlé průměty.

Obr. 7: Řešení úlohy 5

Sestrojme bod A'_1 souměrný s bodem A_1 podle bodu S_1 . Body A, A' prochází povrchové přímky a, a' rotační válcové plochy s osou o ležící v π (tj. obrysové přímky), jejich pravoúhlé průměty a_1, a'_1 jsou tečnami hledané elipsy e_1 . Elipsa e_1 je pravoúhlým průmětem jisté elipsy e , která je řezem rotační válcové plochy rovinou σ . Rovina σ obsahuje body A, B, C, S , je jimi jednoznačně určena. Uvažujme bod $M = AS \cap BC$, zřejmě $M \in \pi$, protože $AS \in \pi$. Polární rovina μ bodu M vzhledem k válcové ploše je kolmá k průmětně (válcová plocha je souměrná podle π). Rovina μ je zřejmě rovnoběžná s povrchovými přímkami rotační válcové plochy, tedy $a_1 \parallel a'_1 \parallel \mu_1$.

Body A, B, A', C leží v rovině σ , leží na elipse e řezu, a tedy tvoří úplný čtyřroh vepsaný kuželosečce e . Bod M je vrcholem polárního trojúhelníku úplného čtyřrohu $ABA'C$ (viz např. [2]). Spojnice zbývajících vrcholů polárního trojúhelníku je polára bodu M vzhledem ke kuželosečce e . Tato kuželosečka leží na válcové ploše, polára bodu M vzhledem ke kuželosečce e leží v polární rovině μ bodu M vzhledem k válcové ploše. Bod M leží také v π , jeho polára vzhledem ke kuželosečce e je tedy pravoúhlým průmětem μ_1 polární roviny μ . Pravoúhlým průmětem řezu válcové plochy rovinou σ je konstruovaná elipsa e_1 .

Konstrukce: Sestrojíme A'_1 souměrně sdružený s A_1 podle S_1 a stopu roviny σ , $p^\sigma = A_1S_1$. Sestrojíme průmět μ_1 polární roviny μ bodu M vzhledem k válcové ploše pomocí vlastností úplného čtyřrohu $ABA'C$, viz Obr. 7. Jakmile známe μ_1 , můžeme sestrojit v bodech A_1 a A'_1 tečny a_1, a'_1 ; $a_1 \parallel a'_1$. V posledním kroku sestrojíme průměr P_1Q_1 stejně jako v úloze 1.

Diskuse: Úloha má jediné řešení, neboť volbou $p^\sigma = A_1S_1$ je poloha zbývajících bodů B a C vzhledem k průmětně π již dána (až na symetrii podle π). V našem případě body B, C leží v opačném poloprostoru vyřatém rovinou π .

Závěr

V úloze 1 je sestrojen řez rotační válcové plochy v kótovaném promítání, kdy osa válce leží v průmětně. Tato speciální poloha válcové plochy vzhledem k průmětně částečně usnadňuje sestrojení samotného řezu. V dalších úlohách na sestrojení požadované elipsy ze zadaných prvků se místo mnohdy složitých projektivních vlastností využívá právě poznatků z první úlohy. Tedy pomocí prostorových vztahů lze efektivně řešit rovinné konstrukce elipsy.

Pro seznámení se s anglickou terminologií základů deskriptivní geometrie doporučujeme [5], [6].

Literatura

1. ŠIMEK, M. O některých konstrukcích elipsy odvozených z prostoru, *Sborník VŠP v Olomouci, Přírodní vědy IV, Matematika–Fysika–Chemie*, SPN, Praha, 1958, 19–28
2. HAVLÍČEK, K. *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha, 1956
3. VOJTĚCH, J. *Geometrie projektivní, Synthetické i analytické vyšetřování projektivních příbuzností a útvarů*, JČMF, Praha, 1932
4. KADERÁVEK, F., KLÍMA, J., KOUNOVSKÝ, J. *Deskriptivní geometrie II*, ČSAV, Praha, 1954
5. HOLLIDAY-DARR, K. *Applied Descriptive Geometry*, Delmar Publications, ISBN 978-0827379121, 1998
6. REDDY, K. V. *Textbook of Engineering Drawing*, BS Publications, ISBN 9788178001497, 2008

Kontaktní adresa:

Marie Chodorová, Mgr. Ph.D.,
Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta UP, Tř. 17. listopadu 12, 771 40 Olomouc, ČR, tel.: 00420 585 634 647, e-mail: marie.chodorova@upol.cz

Lenka Juklová, RNDr. Ph.D.,
Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta UP, Tř. 17. listopadu 12, 771 40 Olomouc, ČR, tel.: 00420 585 634 643, e-mail: lenka.juklova@upol.cz