VYUŽITÍ EXPERIMENTOVÁNÍ PŘI ŘEŠENÍ PROBLÉMŮ VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

ANTOŠ Karel, CZ

Resumé

Článek Využití experimentování při řešení problémů ve školské matematice chce ukázat, jak lze do výuky školské matematiky zapojit metodu zvanou výzkumný přístup. Ukazuje, jak se ve výzkumném přístupu dá užít experimentování, a jak se pomocí experimentování dají zkoumat matematické situace, případně řešit matematické problémy. Ukazuje, že pomocí této metody lze naučit žáky a studenty problémy řešit sami, nebo v případě matematických situací je i objevovat. Žáci a studenti tak mohou poznat tvůrčí aspekt matematiky jako cestu k samostatnému hledání řešení matematických problémů. Cílem je ukázat výzkumný přístup jako metodu, pomocí které mohou žáci objevovat nové poznatky a sami se učit. Využití experimentování je zde ukázáno na příkladech zkoumání matematické situace a řešení dvou problémů

Klíčová slova: experimentování, matematická situace, problém, dokazování, Fibonacciho posloupnost, největší společný dělitel

USING THE EXPERIMENTATION FOR SOLVING PROBLEMS IN SCHOOL MATHEMATICS

Abstract

Article Using experimentation for solving problem in school mathematics wants to show how the method called research approach can be involved to the teaching of school mathematics. It shows how experimentation can be used in the research approach and how the experimentation can be used for exploring mathematical situations or possibly for solving mathematical problems. Using this method we can teach pupils and students to solve problems by themselves, or in the case of mathematical situations to explore them. Pupils and students can get to know the creative aspect of mathematics as a way to finding solutions to mathematical problems. The aim is to show the research approach as a method by which students can discover new knowledge and teach themselves. Using experimentation is shown by the examples exploring mathematical situations and solving two mathematical problems.

Key words: experimentation, mathematical situation, problem, proof, Fibonacci sequence, the greatest common divisor

Úvod

Jedním z důležitých cílů školské matematiky je naučit žáka a studenta samostatně řešit matematické problémy. Zkoumání problémů pomáhá žákům a studentům přiblížit matematiku jako vědu, kde mohou uplatnit tvůrčí přístup při řešení různých matematických situací.

Možností a strategií, které se dají při řešení problémů využít, je celá řada. Jednou z nich je výzkumný přístup (3). Ukazuje se, že výzkumný přístup v oblasti matematického bádání je metodou, která umožňuje žákům a studentům při řešení matematických problémů experimentovat, objevovat vlastní postupy a problémy řešit.

Matematické objevování je metodou, při které žák samostatně objevuje poznatky, jimž se má naučit, a tento proces objevování sám řídí. Tato metoda, která předpokládá aktivní účast žáka, patří do heuristických metod výuky. Žák při ní samostatně objevuje nové poznatky na základě svých předchozích znalostí a zkušeností. Autor mnoha prací zaměřených na úlohu zkoumání v matematice

Kopka proces matematického objevování demonstruje na řešení problémů a označuje ho jako výzkumný přístup. Tvrdí (3), že výzkumný přístup je metoda, pomocí které může učitel matematiku učit, ale že je to i metoda, pomocí které se žák nebo student může matematiku učit. Tuto metodu by mohl učitel použít téměř ve všech oblastech školské matematiky.

Zkoumání problémů představuje důležitou oblast školské matematiky. Pomáhá žákům a studentům přiblížit matematiku jako vědu, kde se tvůrčí činností dají objevovat nové způsoby řešení různých matematických situací a matematických problémů (4). Snaha zpřístupnit matematiku žákům či studentům tedy nespočívá v tom, že je postavíme před hotová řešení, sdělíme jim známé postupy, definice či důkazy, ale především v tom, že jim umožníme poznat tvůrčí aspekt matematiky, a žáci se naučí objevovat a řešit matematické problémy sami.

1 Jak řešit matematické problémy

Podle Kopky (3) je problémem nějaká situace, kterou chceme vyřešit a k tomuto řešení hledáme způsoby a cesty. V (3) dále uvádí, že cit.: „Problém má tři hlavní složky:

1. Výchozí situace, v níž popisujeme souvislosti a poskytujeme informace nebo údaje
2. Cíl, kterého chceme dosáhnout
3. Cesta od výchozí situace k cíli, od výchozí situace k cíli, která pro řešitele může, ale také nemusí, být zřejmá či dosažitelná.“

Obr. 1: Schéma problému (3, s. 15)

Dále je nutno určit, jak se problém dá řešit, určit strategie řešení problému, vyslovovat hypotézy a tyto dokazovat. Po důkazu se z počáteční hypotézy stává matematická věta.

Při zkoumání a řešení problémů budeme ve výuce matematiky využívat výzkumný přístup. Celý proces výzkumného přístupu se dá schematicky znázornit následujícím schématem (3):

Obrázek 2: Schéma výzkumného přístupu (3, s. 18)

Experimentování je jedním ze způsobů, jak se dá zkoumání provádět. Při řešení matematického problému známe cíl, ale hledáme k němu cestu (viz úvodní schéma v článku). Například hledáme

největšího společného dělitele, viz jedna ukázka zkoumání (1). Víme tedy, co chceme najít a hledáme cestu, experimentujeme. U matematické situace naopak neznáme ani cíl, ale experimentujeme, abychom nějaký problém zjistili. Když něco zjistíme, tj. objevíme cíl, snažíme se výsledek experimentování zformulovat a stanovit hypotézu. Hypotézu dokážeme matematickými dokazovacími postupy a výsledkem bude matematická věta nebo odpověď.

Schéma procesu zkoumání podle Kopky (3) vypadá takto:

Zadaná situace – experimentování – vyslovení hypotézy – ověření hypotézy – důkaz hypotézy – přejmenování hypotézy na větu.

Metodu experimentování užijeme jak při řešení problémů, tak při zkoumání matematických situací. Příkladem zkoumání matematické situace je zkoumání Fibonacciho posloupnosti. V ní se experimentováním snažíme objevit nějaké zákonitosti, ty potom zformulujeme a dokážeme. Objevení nějaké zákonitosti se pro nás stává problémem. Po vyřešení prvotního problému můžeme vyslovovat další analogické problémy, a při jejich řešení už můžeme postupovat obdobně.

Ukážeme si zkoumání matematické situace na Fibonacciho posloupnosti. Budeme ji zkoumat a hledat nějakou zákonitost, a pokud něco objevíme, vyslovíme problém, který budeme následně řešit. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

2 Fibonacciho posloupnost – příklad matematické situace

Studentům nejprve vysvětlíme, co to je Fibonacciho posloupnost, co pro ni platí, jak se vytvářejí její členy, a co platí pro její n -tý člen.

Fibonacciho posloupností se v matematice označuje nekonečná posloupnost přirozených čísel, jejíž první členy vypadají takto: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Platí pro ni, že od třetího členu je každé číslo součtem dvou předchozích.

Členy posloupnosti budeme označovat písmeny F s indexem označujícím pořadí tohoto čísla. Tzn.

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \dots$$

Pro první dva členy posloupnosti platí, že $F_1 = F_2 = 1$. Od třetího členu bude platit vzorec:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ kde } n \geq 3,$$

Tento vzorec se označuje jako Fibonacciho pravidlo. Tato posloupnost má mnoho zajímavých vlastností a pomocí zkoumání se můžeme některé z nich pokusit objevit.

Posloupnost je tedy zadána takto:

$$F_1 = F_2 = 1 \wedge F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \text{ pro } n \geq 3.$$

Zkoumání 1:

Zadáme studentům problém: Před zkoumáním můžeme studenty nasměrovat

Zkoumejte součty několika prvních Fibonacciho čísel a zjistěte, jaká pro ně platí zákonitost.

Problém 1: Zkoumejte součty několika prvních Fibonacciho čísel, např.

$$1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

Řešení:

Budeme zkoumat součty několika prvních Fibonacciho čísel. Začneme od prvních dvou. V každém dalším kroku budeme vždy přidávat další Fibonacciho číslo v pořadí.

Systematické experimentování:

$$F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$$

$$\text{Platí také } F_1 = 1 = F_2$$

Získané součty porovnáme s Fibonacciho čísly a budeme sledovat, jestli pro součty platí nějaká zákonitost, a jestli objevená zákonitost platí obecně.

$$F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2 = F_4 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 1 + 1 + 2 = 4 = F_5 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7 = F_6 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = F_7 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20 = F_8 - 1$$

$$\text{Platí také } F_1 = 1 = F_2 = F_3 - 1$$

Nyní výsledky, které jsme získali, zobecníme a vyslovíme hypotézu.

Hypotéza 1:

Pro všechna přirozená čísla n platí:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Nyní musíme tuto hypotézu dokázat. Než hypotézu dokážeme, můžeme ji ověřit ještě na několika dalších případech, např. pro $n = 7, 8, 9$.

Hypotézu ověříme pro další $n = 7, 8, 9$.

Dostaneme:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = 33 = F_9 - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 54 = F_{10} - 1$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 + F_9 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 = 88 = F_{11} - 1$$

Protože výsledky získané i pro další čísla n odpovídají hypotéze, můžeme v dalším kroku hypotézu dokázat. Důkaz lze provést např. výpočtem nebo matematickou indukcí.

Pokud mají studenti dostatečné matematické znalosti, vyzveme je, aby se pokusili s naší pomocí provést důkaz sami. Při důkazech se předpokládá znalost důkazu matematickou indukcí. Dá se ale předpokládat, že důkaz bude muset vyučující provést sám. V dalších obdobných zkoumáních už studenti budou schopni konstrukci důkazu provádět sami.

Důkaz 1: provedeme důkaz hypotézy výpočtem

Upravíme Fibonacciho pravidlo pro n -tý člen posloupnosti.

Platí, že $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, kde $n \geq 3$.

Úpravou dostaneme: $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$ pro $n \geq 3$.

Nyní vyjádříme postupně jednotlivé členy:

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

...

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

Nyní rovnosti sečteme. Na levé straně dostaneme požadovaný součet. Na pravé straně se členy F_i a $-F_i$ postupně vyruší ($F_3 - F_3, F_4 - F_4, \dots$), a tím se výraz zjednoduší až na požadovaný tvar $F_{n+2} - 1$.

Důkaz 2: provedeme pomocí matematické indukce

1. Dokážeme, že vzorec platí pro $n = 1$

- to platí, protože jsme již dříve ukázali, že platí: $F_1 = 1 = F_3 - 1$

2. Nyní musíme dokázat, že když vzorec platí pro $n \geq 1$, pak platí i pro $n + 1$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1 \Rightarrow F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1)$$

Nechť n je libovolné přirozené číslo, pro něž platí indukční předpoklad. Pak:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n + F_{n+1} = (F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n) + F_{n+1} = (F_{n+2} - 1) + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

Zde využijeme dřívější znalosti, že: $(F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n) = (F_{n+2} - 1)$ a Fibonacciho pravidla, podle něžž platí: $F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$

Tedy i matematickou indukcí jsme zde dokázali, že hypotéza 1 platí.

Protože jsme hypotézu dokázali, přejmenujeme ji na **Větu 1**.

Věta 1:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

V příkladu tohoto zkoumání jsme ukázali, že v zadané matematické situaci Fibonacciho posloupnosti lze pomocí experimentování objevit nějaký problém a s ním potom dále pracovat. Když jsme výchozí problém vyřešili a studenti měli dostatek času metodu řešení problému pochopit, vytvořili jsme nový problém, který byl původnímu problému podobný. Tímto způsobem můžeme postupovat dál a vytvářet soubor navzájem příbuzných problémů. Tuto metodu generovaných problémů nazývá prof. Kopka v [3] metodou vytváření hroznů problémů.

V případě předchozího zadání Fibonacciho posloupnosti je základním problémem zkoumání součtů Fibonacciho čísel. Tento problém jsme vyřešili. Nyní bychom mohli vytvořit problém další, např. „Zkoumejte součty Fibonacciho čísel na lichých pozicích“. Vyřešit ho můžeme pomocí metody, kterou jsme použili u prvního problému. Studenti po získaných zkušenostech mohou navrhnout a řešit i další podobné problémy sami, např. „zkoumání součtů čísel na sudých pozicích, zkoumání součtů čtverců Fibonacciho čísel atd...“.

V předchozím jsme pomocí experimentování zkoumali matematickou situaci a vytvářeli problémy. Tedy, znali jsme výchozí situaci, ale neznali jsme ani cíl, a tedy ani cestu k němu.

Nyní si ukážeme zadání dvou problémů, které budeme řešit pomocí experimentování. Budeme tedy znát výchozí situaci a cíl, a k němu budeme hledat cestu.

3 Generující polynom posloupnosti a součet řady

Potřební vstupní znalosti studentů jsou, že znají úvod do teorie posloupností a řad a znají důkaz matematickou indukcí (2). Experimentování je vhodné použít tehdy, když máme posloupnost zadanou rekurentně a chceme vyjádřit n -tý člen pomocí proměnné n .

Problém 2: Posloupnost (a_n) je zadaná rekurentně: $a_1 = 3$; $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$. Vyjádřete ji vzorcem pro její n -tý člen.

Řešení: vypočítáme několik prvních členů naší posloupnosti.

Systematické experimentování:

Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$ vypočítáme několik prvních členů naší posloupnosti a zapíšeme je do tabulky. Tyto členy budeme zkoumat a pokusíme se je rozložit tak, aby z rozkladu byl patrný vztah pro daný člen a číslo n , které udává pořadí toho daného členu. Tento krok bude patrně nejobtížnější

částí řešení celého problému, protože vyžaduje určitou zkušenosti s podobnými operacemi s čísly a pravděpodobně budou studenti potřebovat určitou míru pomoci od učitele.

Tabulka 1: Hledání a rozklad několika prvních členů posloupnosti

n	a_n	rozklad	upravený rozklad
1	3	3	$1 \cdot 1 + 2$
2	7	$3 + 2 \cdot 1 + 2$	$2 \cdot 2 + 3$
3	13	$7 + 2 \cdot 2 + 2$	$3 \cdot 3 + 4$
4	21	$13 + 2 \cdot 3 + 2$	$4 \cdot 4 + 5$
5	31	$21 + 2 \cdot 4 + 2$	$5 \cdot 5 + 6$
6	43	$31 + 2 \cdot 5 + 2$	$6 \cdot 6 + 7$
n			$n \cdot n + (n + 1)$

Hypotéza: $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n = n^2 + (n + 1)$

Důkaz 1: provedeme důkaz matematickou indukcí

1. Dokážeme, že hypotéza platí pro $n = 1$
 - platí, viz předchozí experimentování s výsledky v tabulce
2. Nyní musíme dokázat, že když vzorec platí pro n , pak platí i pro $n + 1$
 $(\forall n \in \mathbb{N}) [a_n = n^2 + (n + 1) \Rightarrow a_{n+1} = (n + 1)^2 + (n + 2)]$

Nechť n je určité přirozené číslo, pro které platí indukční předpoklad, tzn., že $a_n = n^2 + (n + 1)$. Pak:

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 2 = n^2 + (n + 1) + 2n + 2 = (n^2 + 2n + 1) + (n + 2) = (n + 1)^2 + (n + 2)$$

V úpravách jsme vyšli z definice $(n + 1)$ -ho členu, pro výraz a_n jsme použili indukční předpoklad $a_n = n^2 + (n + 1)$, výsledný tvar jsme upravili a získali tvar, který jsme chtěli dokázat.

Tedy jsme matematickou indukcí dokázali, že naše posloupnost se dá vyjádřit vzorcem $a_n = n^2 + (n + 1)$, proto můžeme hypotézu převést na větu.

Věta:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_n = n^2 + (n + 1)$$

4 Největší společný dělitel

Předpokládá se znalost problematiky prvočísel a hledání největšího společného dělitele (5).

Problém 3: Určete v množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel největšího společného dělitele všech čísel $8^{3n+4} - 3^{3n}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Řešení: největšího společného dělitele musíme objevit a v dalších krocích dokázat, že je to opravdu největší společný dělitel (5).

Systematické experimentování:

V první fázi musíme pomocí experimentování zjistit, která čísla dosazením pro $n = 0, 1$, do daného výrazu dostaneme. Výsledky vložíme do tabulky (Tabulka 2).

Tabulka 2

n	$8^{3n+4} - 3^{3n}$	Rozloženo na prvočísla
0	4095	$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
1	2097125	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 883$

Z Tabulky 2 vidíme, že když výsledky získané po dosazení čísel 0, 1 za n do uvažovaného výrazu rozložíme na prvočísla, největším společným dělitelem může být pouze číslo 5. Můžeme za n dosadit ještě číslo 2.

Tabulka 3

n	$8^{3n+4} - 3^{3n}$	Rozloženo na prvočísla
2	1073741095	$5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 937 \cdot 1129$

Zde uděláme malé odbočení. Autor při hledání vhodného výrazu pro řešení tohoto problému často narážel na situaci, že při dosazení za $n = 0, 1, \dots$ do uvedeného výrazu bylo výsledkem prvočíslo. Ovšem bylo třeba najít takové zadání, abychom po dosazení za n dostali takové číslo, které se dá dále na prvočísla rozkládat. Cílem bylo najít rozkladem jiná prvočísla než 2 a 3, aby řešení nebylo viditelné přímo ze zadání. Při rozkladu získaných výsledků na prvočísla doporučujeme studentům užít některou dostupnou internetovou adresu s odkazem na hledání prvočísel, kde najdou např. tabulku se seznamem prvočísel od 1 do 10 000:

<http://www.dostudujte.cz/matematika/cisla/prvocisla>

Pokud zkoumané číslo mezi prvočísly nenajdeme, dá se ještě nějak rozložit. Rozklad na prvočísla 2, 3, 5 a jejich kombinace je všeobecně známý, ale u dalších prvočísel výsledek viditelný přímo není. V našem příkladu při dosazení za $n = 2$ se v postupném rozkládání objeví jako mezivýsledek číslo 1057873. Evidentně není dělitelné čísly 2, 3, 5. Dělitelnost dalšími prvočísly můžeme postupně zkoušet, ale postup je zdlouhavý. Číslo 1057873 není v internetové tabulce, protože uváděná prvočísla jsou do 10000. Proto zde autor doporučuje použít tabulkový procesor a v něm vytvořit jednoduchý vzorec (Tabulka 4). Ve vzorci budeme číslo postupně dělit čísly 2, 3, ... až do přiměřeně vysokého čísla a budeme hledat výsledek, kde bude výsledkem dělení celé číslo. Zde bude $1057873 = 937 \cdot 1129$. Číslo 1057873 tedy není prvočíslem a lze ho dále rozložit na čísla 937 a 1129. Čísla 937 a 1129 již podle tabulky prvočísel prvočísly jsou a zapíšeme je do třetího sloupce tabulky 3.

Tabulka 4

číslo	n	"=číslo/n"
1057873	1	1057873
	2	528936,5
	3	352624,3333
	4	264468,25
	...	...
	933	1133,8403
	934	1132,626338
	935	1131,414973
	936	1130,206197
	937	1129
	938	1127,796375
	939	1126,595314

Tento postup nám ušetří spoustu práce a pro studenty může být vítaným oživením procesu řešení tohoto problému, protože jim bude využití výpočetní techniky určitě blízké.

Hypotéza:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 5 | (8^{3n+4} - 3^{3n})$$

Provedeme důkaz matematickou indukcí.

Důkaz: matematickou indukcí

1. Dokážeme, že hypotéza platí pro $n = 1$
- platí, viz předchozí experimentování s výsledky v tabulce
2. Dokážeme, že když vztah platí pro číslo n , tak potom platí i pro číslo $n + 1$
 $(\forall n \in \mathbb{N}) 5 | (8^{3n+4} - 3^{3n}) \Rightarrow 5 | (8^{3(n+1)+4} - 3^{3(n+1)})$

Nechť n je určité přirozené číslo, pro které platí indukční předpoklad, tzn., že $5 | (8^{3n+4} - 3^{3n})$. Pak:

$$8^{3(n+1)+4} - 3^{3(n+1)} = 8^{3n} \cdot 8^3 \cdot 8^4 - 3^{3n} \cdot 3^3 = 8^3 \cdot 8^{3n+4} - 8^3 \cdot 3^{3n} + 3^{3n} \cdot 8^3 - 3^{3n} \cdot 3^3$$

$$= 8^3 \cdot (8^{3n+4} - 3^{3n}) + 3^{3n}(8^3 - 3^3) = 8^3 \cdot (8^{3n+4} - 3^{3n}) + 485 \cdot 3^{3n}$$

Tvar $(8^{3n+4} - 3^{3n})$ je dělitelný číslem 5 podle indukčního předpokladu, proto první sčítanec je dělitelný číslem 5. Druhý sčítanec obsahuje číslo 485, které je dělitelné číslem 5, proto je druhý sčítanec dělitelný číslem 5.

Tím jsme dokázali, že číslo 5 je největším společným dělitelem výrazu čísel $8^{3n+4} - 3^{3n}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Uvedenou hypotézu proto můžeme přejmenovat na **větu**.

Věta:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 5 | (8^{3n+4} - 3^{3n})$$

Při vyhledávání vhodného výrazu pro zadání předchozího problému se autor několikrát dostal do situace, že při experimentování se zadáváním čísel pro různá n vycházely výsledkem velká čísla, která se na prvočísla obtížně rozkládala, mnohdy nastala situace, kdy nebylo jasné, jestli v dané fázi rozkladu číslo je nebo není prvočíslem, a má se tedy hledat ještě další dělitel. Autor chtěl, aby výsledek po dosazení za n nebylo v první fázi hned prvočíslo, aby se dalo číslo rozkládat. V té chvíli si autor vzal na pomoc vhodnou internetovou stránku, kde byla k dispozici tabulka se seznamem prvočísel, kde se dalo rychle ověřit, jestli dané číslo prvočíslem je nebo ne.

Závěr

V článku Využití experimentování při řešení problémů ve školské matematice jsme ukázali, jak se dá metoda experimentování využít při řešení matematických problémů. Na ukázkách vybraných problémů jsme demonstrovali postupy, jak se experimentováním dá do školské matematiky pronikat. Ukázali jsme, že systematické experimentování může vést k vyřešení zadaného problému, a nastínili jsme, jak můžeme získané výsledky zobecňovat, dokazovat a vytvářet z nich matematické věty.

Na ukázce Fibonacciho posloupnosti jsme ukázali případ, kde máme zadanou matematickou situaci a experimentováním nejprve vhodný problém hledáme a ten následně řešíme. U problému 3 jsme při hledání největšího společného dělitele použili tabulkový procesor Excel ulehčení hledání rozkladu na prvočísla. Při hledání prvočísel jsme si pomohli využitím internetu, kde jsme v příslušných stránkách hledali, jestli zkoumané číslo je nebo není prvočíslem. Tyto pomůcky řešení problému usnadní a obohatí.

Je rovněž důležité zmínit, že tento tvůrčí přístup by měl být na hodinách matematiky rozvíjen, proto je zde nezastupitelná role učitele, který by měl žákům a studentům tyto cesty ukazovat a žáky a studenty k nim vést, aby sami dokázali tvůrčí aspekt matematiky využívat a schopnost řešit problémy samostatně rozvíjet.

Literatura

1. ANTOŠ, K. Jak řešit problém hledání největšího společného řešitele, *Trendy ve vzdělávání*, 2015, roč. 8, č. 1, UPAL Olomouc, ISSN 1805-8949.
2. CALDA, E., PETRÁNEK, O., ŘEPOVÁ, J. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-041-1.
3. KOPKA, J. *Umění řešit matematické problémy*. Ústí n. Labem: UJEP, 2013. ISBN 978-80-903625-5-0.
4. KOPKA, J. *Zkoumání ve školské matematice*. Ružomberok: Katolícka Univerzita, 2005. ISBN 80-8084-064-4.
5. POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-356-1

Kontaktní adresa:

Karel Antoš, Ing. Bc.,
Katedra přírodních věd, VŠTECB v Českých Budějovicích, Okružní 517/10, 370 01 České Budějovice,
+420 387 842 166, kaant@seznam.cz